POŽADAVKY K STÁTNÍ ZÁVĚREČNÉ ZKOUŠCE
MATEMATICKÉ MODELOVÁNÍ VE FYZICE A TECHNICE [MATEMATIKA]

1. Úvod

Tento dokument je neformálním průvodcem po státní závěrečné zkoušce v magisterském studiu na oboru "Matematické modelování ve fyzice a technice", což je magisterský obor na programu *matematika*. Pokud studujete v programu *fyzika*, váš obor se jmenuje "Matematické a počítačové metody ve fyzice", a *požadavky k státní závěrečné zkoušce jsou odlišné*, jejich znění najdete na internetových stránkách matematického modelování.

Státní závěrečná zkouška, se skládá z

- obhajoby diplomové práce,
- ústní části,

a obvykle v tomto pořadí i probíhá. Podrobný popis jednotlivých částí je uveden níže.

2. Obhajoba diplomové práce

Student během dvaceti minut představí[1] výsledky získané při řešení diplomové práce. Poté následuje diskuse, během které student reaguje na případné připomínky oponentů. (Posudky od oponentů jsou předem dostupné v Studijním informačním systému. Je naprosto nezbytné abyste kvalifikovaně reagovali na připomínky oponentů, důkladně se připravte! Opět se očekává, že během odpovědi použijete předpřipravenou prezentaci.) Na závěr student zodpoví případné dotazy členů komise či dalších zúčastněných.

3. Ústní zkouška

3.1. **Průběh ústní zkoušky.** Ústní zkouška spočívá v zodpovězení několika otázek týkajících se níže uvedených témat. V principu se jedná o témata probíraná v povinných předmětech studijního plánu. Přesněji, zkouška probíhá tak, že student zodpoví celkem šest otázek z těchto oblastí

- teorie parciálních diferenciálních rovnic (jedna otázka),
- funkcionální analýza (jedna otázka),
- metoda konečných prvků (jedna otázka),
- teorie řešení systémů algebraických rovnic (jedna otázka),
- kinematika a dynamika spojitého prostředí (jedna otázka),
- teorie konstitutivních vztahů (jedna otázka).

Každé z odpovědí je zpravidla věnováno deset minut. Očekává se, že student prokáže hlubší pochopení jednotlivých témat a schopnost nahlédnout daná tvrzení v širším kontextu. (Neočekává se se důkladná znalost *technických detailů* v jednotlivých důkazech a podobně. Student by měl prokázat, že rozumí základním úvahám, které jsou použity při důkazech zásadních tvrzení, a měl by prokázat, že chápe proč jsou daná tvrzení/definice formulována právě daným způsobem. Detailní technickou znalost problematiky už jste prokázali během zkoušek z příslušných předmětů!) Seznam témat k ústní zkoušce je přiložen níže.

3.2. **Témata k ústní zkoušce.**

(1) **Parciální diferenciální rovnice**

Zkoušená látka je probírána zejména v přednáškách Parciální diferenciální rovnice 1 a Parciální diferenciální rovnice 2. Předpokládá se, že se student se rovněž velmi dobře orientuje v základech teorie parciálních diferenciálních rovnic ve smyslu vstupních požadavků pro navazující magisterské studium, tedy v teorii parciálních diferenciálních rovnic kupříkladu na úrovni přednášky Úvod do parciálních diferenciálních rovnic.

(a) Sobolevovy prostory

Slabá derivace, definice a základní vlastnosti Sobolevových prostorů $W^{k,p}$ – reflexivita, separabilita, hustota hladkých funkcí, operátor prodloužení pro $W^{1,p}$-funkce a lipschitzovskou hranici. Věty o spojitém a kompaktním vnoření Sobolevových prostorů do Lebesgueových a Hölderových prostorů. Zavedení stop pro funkce ze Sobolevových prostorů, věta o stopách, inverzní věta o stopách.

(b) Slabá řešení pro lineární eliptické rovnice na omezené oblasti

Formulace slabé úlohy pro lineární eliptickou rovnici s různými okrajovými podmínkami, řešení pomocí Rieszovy věty o reprezentaci (symetrický operátor), pomocí Lax-Milgramova lematu respektive Galerkinovou metodou. Kompaktnost řešícího operátoru, vlastní vektory a vlastní čísla řešícího operátoru. Fredholmova alternativa a

[1] Očekává se prezentace s pomocí projektoru, standardně je k dispozici počítač s Adobe Acrobat Reader a operačním systémem Windows. Pokud vaše prezentace vyžaduje spuštění videa, ověřte si předem, že na univerzitním počítači jsou nainstalovány všechny potřebné kodeky a podobně. Totéž se týká dalších nestandardních požadavků na software. Po domluvě lze použít vlastní počítač. Pozor, projektor je typicky vybaven pouze VGA konektorem. Pro použití HDMI budete pravděpodobně potřebovat redukci, zajistěte si ji předem.

její aplikace. Princip maxima pro slabé řešení. $W^{2,2}$ regularita pomocí techniky diferencí. Samoadjungovaný operátor: ekvivalence úlohy s minimalizací kvadratického funkcionálu.

(c) Slabá řešení pro nelineární eliptické rovnice na omezené oblasti
Úvod do variačního počtu, základní věta variačního počtu, duální formulace, souvislost s konvexitou. Existence a jednoznačnost řešení nelineárních úloh pomocí věty o pevném bodu (nelineární Lax-Milgram pro dvojkovou strukturu). Existence řešení pomocí Galerkinovy metody a Mintyho metody – monotónní operátor a semilineární člen.

(d) Lineární parabolické rovnice 2. řádu
Bochnerovy prostory a jejich základní vlastnosti, Gelfandova trojice, Aubin-Lionsova věta. Slabá formulace, nabývání počáteční podmínky, existence řešení pomocí Galerkinovy aproximace, jednoznačnost a regularita řešení (časová a prostorová), zhlazující vlastnost, princip maxima.

(e) Lineární hyperbolické rovnice 2. řádu
Slabá formulace hyperbolického problému, nabývání počátečních podmínek, existence řešení pomocí Galerkinovy aproximace, jednoznačnost, regularita řešení (časová a prostorová), konečná rychlost šíření signálu.

(2) **Numerická matematika**

Zkoušená látka je probírána zejména v přednáškách Metoda konečných prvků a Maticové iterační metody 1. Předpokládá se, že se student velmi dobře orientuje v základech numerické matematiky ve smyslu vstupních požadavků pro navazující magisterské studium, tedy v látce probírané kupříkladu v přednáškách Analýza maticových výpočtů 1 a Základy numerické matematiky.

(a) Metoda konečných prvků pro řešení eliptických rovnic
Galerkinova a Ritzova metoda pro řešení abstraktní lineární eliptické rovnice. Odhad diskretizační chyby této metody – Céovo lemma. Definice abstraktního konečného prvku, jednoduché příklady konečných prvků Lagrangeova a Hermiteova typu. Teorie aproximací v Sobolevových prostorech: aproximační vlastnosti operátorů zachovávajících polynomy. Aplikace těchto výsledků pro prvky Lagrangeova a Hermiteova typu. Odvození řádu konvergence přibližných řešení konkrétních eliptických úloh 2. řádu. Odhad řádu konvergence v L^2 normě – Nitscheho lemma. Základy numerické integrace v metodě konečných prvků.

(b) Metody pro řešení soustav algebraických rovnic a výpočet vlastních čísel
Metody pro řešení soustav algebraických rovnic a výpočet vlastních čísel Spektrální rozklad operátorů a matic. Invariantní podprostory a spektrální informace, normalita. Srovnání přímých a iteračních metod pro řešení lineárních algebraických soustav. Projekční proces a problém momentů. Popis konvergence iteračních metod. Souvislost mezi iteračními metodami pro řešení soustav rovnic a metodani pro výpočet vlastních čísel. Srovnání metod pro řešeni lineárních a nelineárních soustav algebraických rovnic. Numerická stabilita výpočtů a popis algebraické chyby v souvislosti s řešením problémů matematického modelování.

(3) **Funkcionální analýza**

Zkoušená látka je částečně probírána v přednášce Funkcionální analýza I. Teorie prostorů funkcí je také částečně pokryta přednáškami Parciální diferenciální rovnice 1 a Parciální diferenciální rovnice 2. Předpokládá se, že se student velmi dobře orientuje v základech funkcionální analýzy ve smyslu vstupních požadavků pro navazující magisterské studium, tedy v teorii kupříkladu na úrovni přednášky Úvod do funkcionální analýzy.

(a) Hilbertovy a Banachovy prostory
Definice, norma, skalární součin, příklady Banachových prostorů. Lineární funkcionály, Hahn-Banachova věta. Duální prostory, reprezentace některých duálů (Hilbertovy prostory, Lebesgueovy prostory). Rieszova věta o reprezentaci. Slabá a *-slabá konvergence. Banach-Alaogluova věta. Slabá kompaktnost a reflexivita.

(b) Spojitá lineární zobrazení
Definice, základní vlastnosti, norma, prostor lineárních zobrazení, adjungované zobrazení. Základní vlastnosti spektra a spektrálního poloměru, Gelfandova-Mazurova věta. Kompaktní operátory, symetrický operátor, samoadjungovaný operátor, uzávěr operátoru, uzavřený operátor, definice a vlastnosti adjungovaného operátoru. Vlastní čísla a vlastní funkce symetrických eliptických operátorů.

(c) Věty o pevných bodech
Banachova věta, Brouwerova věta, Schauderova věta, Schaeferova věta.

(d) Integrální transformace a základy teorie distribucí
Definice Fourierovy transformace na L^1 a její základní vlastnosti, věta o inverzi, Fourierova transformace konvoluce a derivace, Plancherelova věta. Prostor testovacích funkcí a konvergence v něm, definice distribuce, základní příklady, charakterizace distribuce, řád distribuce, operace s distribucemi (derivování, násobení funkcí), Schwarzův prostor a temperované distribuce, Fourierova transformace funkcí ze Schwarzova prostoru $\mathcal{S}$ a z prostoru temperovaných distribucí $\mathcal{S}'$, její základní vlastnosti. Fourierova transformace na L^2.

(4) **Mechanika kontinua**

Zkoušená látka je probírána zejména v přednáškách Mechanika kontinua, Termodynamika a mechanika nenewtonovských tekutin a Termodynamika a mechanika pevných látek.

(a) Kinematika kontinua
Popis pohybu spojitého prostředí. Deformace čarových, plošných a objemových elementů, deformace, deformační gradient, polární rozklad deformačního gradientu a jeho interpretace, pravý a levý Cauchyův–Greenův tenzor, Greenův–Saint-Venantův tenzor. Rychlost deformace čarových, plošných a objemových elementů. Zavedení

materiálové a prostorové rychlosti, gradient rychlosti, symetrický gradient rychlosti, materiálová derivace. Isochorická deformace. Proudnice a proudočáry. Nutné a postačující podmínky pro materiálové plochy. Lagrangeův a Eulerův popis. Podmínky kompatibility pro tenzor malých deformací. Izotropní tenzorové funkce, věta o reprezentaci izotropních tenzorových funkcí.

(b) Dynamika kontinua
Bilanční rovnice (hmota, hybnost, moment hybnosti, celková energie, vnitřní energie, entropie) v prostorovém i materiálovém popisu. Integrální tvar bilančních rovnic, princip lokalizace. Cauchyho tenzor napětí, první Piolův–Kirchhoffův tenzor napětí, Piolova transformace. Formulace bilančních rovnic v neinerciální vztažné soustavě.

(c) Jednoduché konstitutivní vztahy
Stlačitelná a nestlačitelná Navierova–Stokesova–Fourierova tekutina (viskózní tepelně vodivá tekutina), stavová rovnice ideálního plynu. Geometrická linearizace, linearizovaná teorie pro elastické pevné látky. Okrajové podmínky, okrajové podmínky pro posunutí a napětí.

(d) Nenewtonské tekutiny
Bilanční rovnice termodynamiky kontinua v případě nenewtonovských tekutin, identifikace produkce entropie. Clausiova–Duhemova nerovnost. Předpoklad maximalizace rychlosti produkce entropie a jeho využití pro návrh matematických modelů pro tekutiny, pojem přirozené konfigurace. Přehled nenewtonovských jevů – závislost viskozity na symetrickém gradientu rychlosti a tlaku, rozdíl normálových napětí, aktivační/deaktivační kritéria, relaxace napětí (stress relaxation), tečení (non-linear creep). Princip objektivity a jeho důsledky, objektivní veličiny v mechanice tekutin, objektivní časová derivace. Využití věty o reprezentaci izotropních tenzorových funkcí. Přehled nejpoužívanějších materiálových modelů pro nenewtonovské tekutiny. Tekutiny mocninného typu, tekutiny s viskozitou závislou na tlaku, tekutiny Binghamova typu. Viskoleastické tekutiny a zjednodušené modely typu pružina–tlumič. Kortewegovy tekutiny.

(e) Pevné látky
Princip objektivity a jeho důsledky, objektivní veličiny v mechanice pevných látek. Elastické materiály v teorii konečných deformací, linearizovaná teorie. Nestlačitelné materiály v teorii konečných deformací a v linearizované teorii. Elastický materiál jako materiál, který neprodukuje entropii, souvislost mezi tenzorem napětí a volnou energií. Hyperelastický materiál, příklady hyperelastických materiálů, chování vzhledem k determinantu deformačního gradientu. Variační formulace statické úlohy pro hyperelastický materiál. Viskoelastické pevné látky – Kelvinův–Voigtův model – a zjednodušené modely typu pružina–tlumič.

4. Kontakt

V případě nejasností se prosíme obraťte na Vítka Průšu (prusv@karlin.mff.cuni.cz) nebo Josefa Málka (malek@karlin.mff.cuni.cz). Těšíme se na vás u státní závěrečné zkoušky a doufáme, že nás potěšíte tím, co všechno jste se během studia naučili!